INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE GÉOLOGIE APPLIQUÉE
ET DE PROSPECTION MINIÈRE DE NANCY

SESSION 1 9 8 4 — EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'attention des candidats est attirée sur le fait qu'il sera tenu le plus grand compte du soin apporté à la rédaction de la copie, à la présentation générale du devoir, ainsi qu'aux justifications des calculs effectués.

*****

Pour toute application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, périodique, de période 2π, et pour tout entier naturel n, on pose :

$$a_n(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt, \text{ et } b_n(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\sin nt\,dt.$$

I, 1° - Montrer que, si φ a une dérivée continue sur $[a, b]$, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi(t)\sin nt\,dt = 0$$

I, 2° - Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on ait : $\int_0^{\pi}(\alpha t + \beta t^2)\cos nt\,dt = \frac{1}{n^2}$

I, 3° - Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale :

$$\int_0^{\pi}(\alpha t + \beta t^2)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \text{ converge et exprimer } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

à l'aide de cette intégrale.

I,4° - a) Montrer qu'il existe une fonction φ continue sur $[0,\pi]$ et telle que pour $0 < t \leq \pi$, $\varphi(t) = \frac{\alpha t + \beta t^2}{2\sin\frac{t}{2}}$. Etudier l'existence et la continuité de la dérivée de φ.

b) Calculer $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ et $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

II - f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π, admettant une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$.

On pose $u_0(x) = \frac{1}{2}a_0(f)$ et, pour tout x réel et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_n(x) = a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx$ et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$.

II, 1 - a) Prouver, pour tout entier naturel n et tout réel x, l'existence de l'intégrale $I_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{t-x}{2}\right]}{2\sin\left[\frac{t-x}{2}\right]}\,dt$, et que $S_n(x) = \frac{1}{\pi}I_n(x$

b) Calculer les intégrales $J_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left[(2n+1)\frac{t-x}{2}\right]}{2\sin\left[\frac{t-x}{2}\right]}\,dt$

et $\int_0^{\pi}\frac{\sin\left[(2n+1)u\right]}{\sin u}\,du$

c) Montrer que $S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)-f(x)}{2\sin\left[\frac{t-x}{2}\right]}\sin\left[(2n+1)\frac{t-x}{2}\right]d = K_n(x$

. . . / . . .

II, 2 - a) x est un réel donné. Montrer qu'on peut lui associer une fonction Ψ, continue sur $\mathbb{R}$, et telle que, pour tout t n'appartenant pas à l'ensemble $\{x + 2k\pi / \ k \in \mathbb{Z}\}$, $\varphi(t) = \dfrac{f(t) - f(x)}{2 \sin\left[\frac{t-x}{2}\right]}$. Exprimer $\varphi(x + 2k\pi)$ et montrer que φ a une dérivée continue sur $\mathbb{R}$. (on étudiera en particulier l'existence et la continuité de φ' aux points $t = x + 2k\pi$)

b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} K_n(x) = 0$

c) Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge et exprimer sa somme.

II, 3 - En utilisant des intégrations par parties, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout entier naturel n non nul, $|a_n(f)| < \frac{A}{n^2}$.

Prouver l'existence d'un réel C tel que, pour tout réel x et tout $n > 0$, on ait $|u_n(x)| < \frac{C}{n^2}$.

II, 4 - g est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de période 2π, et continue sur $\mathbb{R}$. On pose $t_n(x) = u_n(x)\, g(x)$.

a) Prouver l'existence d'un réel K majorant $n^2 |t_n(x)|$ pour tout entier n et tout réel x. En déduire, pour $n \geqslant 1$, $\left|\left(\sum_{k=n}^{\infty} (t_k(x))\right)\right| \leqslant K\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)$.

b) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_o tel que : pour tout entier n supérieur à n_o et tout x réel, on ait :

$$\left| f(x)\, g(x) - \sum_{k=0}^{n} t_k(x) \right| < \varepsilon .$$

c) Démontrer que la série $\frac{1}{2} a_o(f)\, a_o(g) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(f) a_n(g) + b_n(f) b_n(g)\right)$ converge et a pour somme $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx$.

III, 1 - Soit f_1 la fonction paire sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π et telle que, pour $0 \leqslant t \leqslant \pi$, $f_1(t) = -2t^3 + 3\pi t^2$.

a) Montrer que f_1 a une dérivée seconde continue sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $a_n(f_1)$ et $b_n(f_1)$.

c) Déterminer les sommes des séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

III, 2 - Soit g_1 la fonction périodique, de période 2π sur $\mathbb{R}$ et telle que, pour $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, $g_1(t) = |t|$

a) Calculer $a_n(g_1)$ et $b_n(g_1)$.

b) En utilisant **II, 2**, calculer les sommes des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

III, 3 - Soit f_2 l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_2(t) = |\sin^3 t|$

a) Calculer $a_n(f_2)$ et $b_n(f_2)$.

b) En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2 (4n^2-9)^2}$